PROPOSIZIONE 1.93 Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto.

(i) $\bar{s} = \sup A$ se e solo se $\bar{s}$ è un maggiorante di A e per ogni $t < \bar{s}$ esiste un elemento[43] x di A tale che $t < x$.

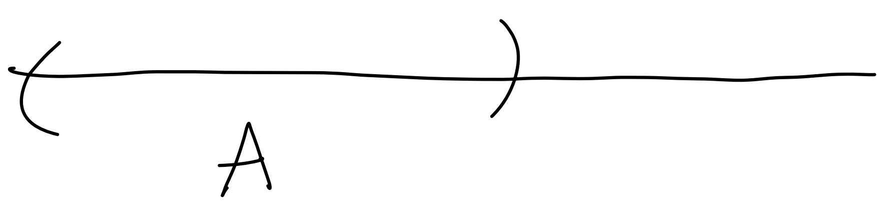
(ii) $\underline{s} = \inf A$ se e solo se $\underline{s}$ è un minorante di A e per ogni $t > \underline{s}$ esiste $x \in A$ tale che $x < t$.

DIMOSTRAZIONE

(i) Se $\bar{s} = \sup A$, $\bar{s}$ è un maggiorante di A (per definizione). Sia $t < \bar{s}$. Se $x \leq t$ per ogni $x \in A$, si avrebbe che t è un maggiorante di A strettamente più piccolo di $\bar{s}$, contraddicendo la definizione di estremo superiore. Quindi esiste $x \in A$ con $x > t$.

Sia ora $\bar{s}$ un maggiorante per A tale che per ogni $t < \bar{s}$ esiste un elemento x di A con $t < x$. Chiaramente non può esistere un maggiorante $M < \bar{s}$ (si prenda $t = M$) e quindi $\bar{s} = \sup A$.

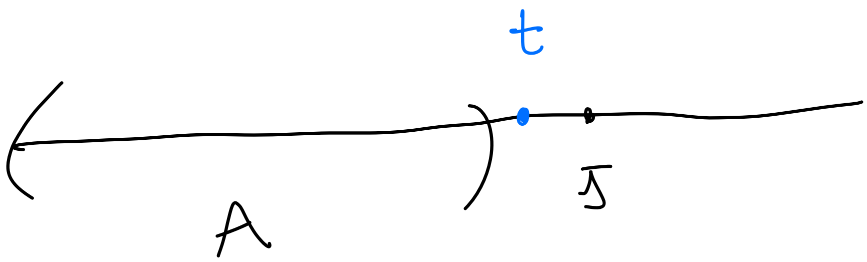
(ii) L'analoga dimostrazione del punto (ii) viene lascia per esercizio. ∎



per definizione $\sup A := \min(\mathcal{M}_A)$

(minimo dei maggioranti di A)

Quindi se $\bar{s} \in M_A$ ($\bar{s}$ è un maggiorante)



cioè $\bar{s} \geq x \quad \forall x \in A$

ora prendo $t < \bar{s}$ se $t \geq x \quad \forall x \in A$

(vedi figura) allora $t < \bar{s}$ è

un maggiorante. Dato che $\bar{s}$ è il

MINIMO dei maggioranti è ASSURDO.

Viceversa se $\bar{s} \in M_A$

$\forall \; t < \bar{s} \quad \exists \quad x > t \quad x \in A$

vuol dire che $\nexists$ nessun elemento di

M_A minore di $\bar{s}$ $\Rightarrow$ $\bar{s}$ è il minimo di M_A ⊠

Per l'estremo inferiore

se $\underline{s} = \inf A$ allora

$\underline{s}$ è un minorante $(\underline{s} \in m_A)$

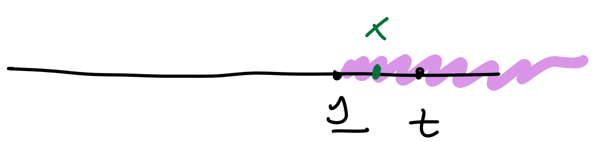
cioè $\underline{s} \leq x \quad \forall\, x \in A$

inoltre $\underline{s}$ è il max di m_A cioè

$\forall\, t \in m_A \quad t \leq \underline{s}$.

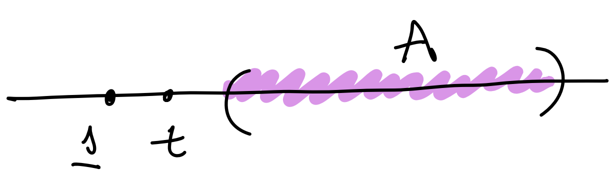
DIMOSTRIAMO per assurdo che

$\forall\, t > \underline{s} \quad \exists\, x \in A$ t.c. $x \leq t$



ASSUMIAMO che sia falso e NEGHIAMO LA TESI:

$\exists\, t > \underline{s} : \quad \forall\, x \in A$ si ha $x \geq t$



ma allora t è un minorante di A

maggiore di $\underline{s}$

dato che $\underline{s}$ è il MASSIMO dei minoranti

ho una contraddizione.

$\longleftarrow$

Viceversa se $\underline{s} \in m_A$ e * $\forall t > \underline{s}$

$\exists \; x \in A$ t.c. $x \le t$

allora $\underline{s} = \inf(A) = \max(m_A)$

infatti se $\underline{s} \ne \max(m_A)$

allora $\exists \; t > \underline{s}$ t.c. $t \in m_A$

cioè $\forall \; x \in A \quad t \le x$

ma questo contraddice l'ipotesi *

Esercizio 1.41 Se $x \in A$ chiaramente $d(x, A) = 0$. È vero il viceversa? (Se vero, dimostrarlo; se non è vero, trovare un controesempio).

FALSO.

$A = (0,1) \quad ; \quad x = 0$

Esercizio 1.42 Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $n := [x]$ la sua parte intera. Si dimostri che:

$$d(x, \mathbb{Z}) = \min\{x - n, n + 1 - x\}.$$

Esercizio: Sia

$$A := \{\sqrt{n} - \sqrt{m} \; ; \; n, m \in \mathbb{N} \quad n > m\}$$

determinare se esistono

$\sup A$, $\inf A$

determinare $d(A, 0)$

Esercizio. Dimostrare che se A è limitato inferiormente $\Rightarrow$

$$d(A, \inf A) = 0$$

Esercizio 1.51 Si dimostri che: (non svolto)

$$\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y-x}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, 0 \leq x \leq y\,. \tag{1.79}$$

se $x = 0$ vero! se $x \neq 0 \Rightarrow y > 0$

$$\sqrt[n]{y}\left(1 - \sqrt[n]{\frac{x}{y}}\right) \leq \sqrt[n]{y}\left(\sqrt[n]{1 - \frac{x}{y}}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leq \left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Updownarrow \qquad A^{\frac{1}{n}} \leq B^{\frac{1}{n}} \overset{(A,B)>0}{\Longleftrightarrow} A \leq B$$

$$\left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n} \leq \left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$\Updownarrow \qquad a = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (0 < a < 1)$$

$$(1-a)^n \leq 1 - a^n$$

procedo quindi a dimostrare questo

per induzione

e per $n=1$ è vero!

Supponiamo che $(1-a)^n \leq 1-a^n$

allora

$$(1-a)^{n+1} = (1-a)(1-a)^n$$

$$\leq (1-a)(1-a^n) \qquad \text{[hp. induttiva]}$$

$$\leq 1-a-a^n+a^{n+1}$$

ora $1-a-a^n+a^{n+1} \leq 1-a^{n+1}$

$$\Updownarrow$$

infatti

$$2a^{n+1} \leq a+a^n$$

dato che $a^{n+1} \leq a$ e $a^{n+1} \leq a^n$

per $a<1$!

Esercizio: trovare i punti di accumulazione

di $A = \left\{ \left\{ \frac{n}{3} \right\} + \frac{1}{n} \quad \text{per} \quad n \in \mathbb{N} \right\}$

i punti di accumulazione sono $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

$\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ n \in \mathbb{N}:$

$$\left| \left\{ \frac{n}{3} \right\} + \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

prendo $n = 3k$; per $k \in \mathbb{N}$

in modo che $\left\{ \frac{n}{3} \right\} = 0$

$\left\{ \frac{n}{3} \right\} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3k}$ quindi se prendo

$k > \frac{1}{3\varepsilon}$ $\quad \frac{1}{3k} < \varepsilon$ stesso per $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

$\{x + k\} = \{x\}$ (osservazione)

Esercizio 1.39 Si dimostri che:

$$[x+1] = 1 + [x] , \qquad \{x+1\} = \{x\} , \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Esercizio: Sia

$$A := \{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \ ; \ n, m \in \mathbb{N} \quad n > m \}$$

determinare se esistono

$\sup A$, $\inf A$

determinare $d(A, 0)$

Noto che $0 \in m_A$. Ora

dato che posso costruire una successione

$x_n \in A$ t.c. $x_n \searrow 0$ si ha che

$\inf A = 0$ $\qquad x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

D'altro canto dato che ponendo

$n = (k+1)^2$; $m = 1$ si ha che

$\sqrt{n} - \sqrt{m} = k$ quindi $\mathbb{N} \subset A$

e $\sup A = \infty$.